

文章编号: 1000-7598-(2006) 11-1902-07

基于滑面段旋转的 Monte Carlo 搜索技术 及改进(I): 转角大小随机

张鲁渝, 张建民

(清华大学 水电系岩土工程研究所, 北京 100084)

摘 要: 对 Abdallah I. Husein 等人提出的 Monte Carlo 搜索技术进行了改进: (1) 增加了若干条几何合理性条件; (2) 增加了防止节点重合的机制; (3) 通过确定滑面段旋转角的上、下限, 使其能够适用于上凸型滑面; (4) 增加了节点数调整机制, 以使搜索到的临界滑面更光滑。算例分析表明, 改进后的算法不但保持了原方法的优点, 而且更实用, 临界滑面的自动搜索变得更为可靠与稳定, 并将此算法纳入到自主研发的 ZSlope 边坡稳定分析软件中。

关 键 词: 临界滑面; Monte Carlo; 边坡; 稳定分析

中图分类号: TU 413.6⁺2

文献标识码: A

Modified Monte Carlo techniques by rotating slip segments for searching general critical slip surface(I): random angle of rotation

ZHANG Lu-yu, ZHANG Jian-min

(Institute of Geotechnical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Based on the algorithm advised by Abdallah I. Husein and his classmates, some improvements have been made as follows: (1) adding several conditions of geometry rationality; (2) developing a technique by controlling the range of slip segments rotation to prevent two adjacent vertices of a slip surface from approaching each other; (3) making the algorithm to be suitable for slip surfaces that are convex upward; (4) adding the changeable vertex count mechanism of a slip surface during the searching procedure in order to make the critical slip surface more smooth. The results show that the modified algorithm is more practical feasibility and stability to aim at searching the critical slip surface, preserving the advantages of the original algorithm. The algorithm is also adopted by the slope stability analysis software named ZSlope developed by the authors.

Key words: critical slip surface; Monte Carlo; slope; stability analysis

1 引 言

临界滑面的自动搜索技术近 20 年已得到长足发展。截止目前, 业已提出非线性优化法^[1~3]、随机搜索法^[4, 5]、Monte Carlo 法^[6]等多种搜索算法。尽管这些算法的搜索模式(试算滑面的产生方式)各不相同, 但它们在求解过程中一般均会产生大量的试算滑面, 且要求对每一条试算滑面进行繁琐的几何合理性检验, 这样不仅会耗费较多机时, 而且更为严重的是, 一旦有不符合条件的试算滑面进入安全系数的求解过程, 搜索失败的可能性便会大大增加。为克服上述缺陷, Abdallah I. Husein 等人(2001 年)

提出了一个很好的解决方案, 即基于滑面段旋转的 Monte Carlo 搜索技术^[7~9](下文简称 MC 搜索技术), 它通过滑面段旋转来产生试算滑面, 只要初始滑面满足几何合理性条件, 便能保证随后生成的一系列试算滑面自动满足几何合理性条件, 而无需一一验算。然而, 实践中笔者发现该法有关细节仍有待完善, 否则会严重影响其稳定性与实用性。鉴于此, 本文对 MC 搜索技术进行了改进: (1) 增加了若干条几何合理性条件; (2) 增加了防止节点重合的机制; (3) 解除了原算法只适用于上凹型滑面的限制, 使其也适用于上凸型滑面; (4) 增加了节点数调整机制, 以使搜索到的临界滑面更光滑。

算例分析表明,改进后的算法不但保持了原方法的优点,而且更实用、更稳定。笔者还将此算法纳入到自主研发的 ZSlope 边坡稳定分析软件中^[10]。

2 MC 搜索技术的基本原理

MC 搜索技术的基本原理由两阶段组成: (1) 旋转探测(滑面段绕自身端点旋转); (2) 重启旋转探测,即以当前临界滑面为初始滑面返回步骤(1),重新执行,周而复始,直到满足相关收敛条件为止。在讨论该技术之前简要介绍一些基本概念。

2.1 坡体模型

如图 1 所示, $y=t(x)$ 为坡面曲线, $y=s(x)$ 为滑面曲线,它由一系列节点相连组成,在笛卡尔坐标系中,各节点可由 (x_i, y_i) 表示, $i=1, 2, \dots, n$, n 为滑面节点数,滑面相邻节点相连所得直线为滑面段 $se_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$, m 为滑面段数。 $y=l_1(x)$, $y=l_2(x)$ 为土层分隔线, $y=b(x)$ 为坡体底边界。

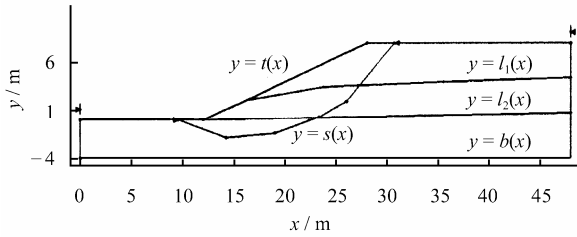


图 1 坡体模型

Fig.1 The simplified slope model

2.2 几何合理性条件

任何试算滑面 $s(x)$ 都必须满足几何合理性条件^[5, 7]: (1) 节点水平坐标递增; (2) 滑面左、右端点在坡面线上,其他节点必须在坡体内; (3) 相邻滑面段夹角不允许出现尖角; (4) 滑面不能与坡面线相交(滑面左、右端点除外); (5) 相邻节点水平间距应大于最小水平间距(防止节点重合)。尽管文献[7]并未明确列出第(3)~(5)条(笔者新加入),但通常情况下绝大多数试算滑面也都自动满足上述条件,即使有少量不满足,但往往并不是临界滑面,所以不会影响临界滑面的搜索。

严格来说,并不能因为潜在的问题没有暴露就可以听之任之,笔者也的确多次遇到由此(忽略(3)~(5)条)带来的一些问题,如滑面段与坡面相交导致出现负土条重量(见图 2),节点重合导致浮点溢出错误等等。对第(4)条而言,就算初始滑面满足也不能保证随后的试算滑面一定满足,所以需要对每一条试算滑面逐一进行检验(工作量会有少量增加,其他条件不需如此)。此外,原

MC 搜索技术提出了一个几何约束条件,即要求各滑面段倾角递增(滑面形状呈上凹型),这无疑不能满足实践的需要,要取消此约束,必须透彻分析 MC 搜索技术的基本原理,详见下文。

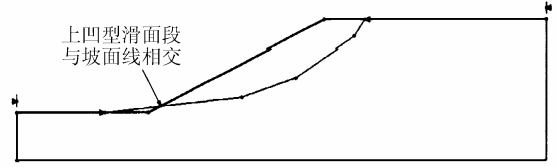


图2 滑面段与坡面线相交^[12]

Fig.2 Intersection of slip segment and slope

2.3 旋转探测

确定初始滑面,各滑面段绕自身端点依次旋转(先右端点,后左端点),每旋转一次便会产生一条新的试算滑面,这一过程需要两个重要参数:旋转角度及方向。

(1) 旋转角度的控制

假定滑面段 i 绕节点 V_{i+1} 旋转,则旋转角度为

$$\alpha_i^{j+1} = \alpha_i^j + |R\Omega_i^j| N_d \quad (1)$$

式中 R 为 $(-0.5, 0.5)$ 区间均匀分布的随机数,因为 R 的存在,滑面段每次旋转的角度并不相同; α_i^j 为滑面段 i 在第 j 次旋转后的倾角(逆时针旋转为正); Ω_i^j 为滑面段 i 的第 j 次旋转的基准角,其初始值可取 $\Omega_i^1 = \alpha_i / (2m - 1)$, m 为滑面段数; N_d 表示旋转方向,当 $N_d = +1$ 时,逆时针旋转;当 $N_d = -1$ 时顺时针旋转, N_d 取值是关键,文献[7]疏漏了此细节。

当滑面段 i 绕节点 V_{i+1} 旋转时,节点 V_i 的坐标可由滑面段 i 与滑面段 $i-1$ 相交得到,如式(2)、式(3),此时便形成一条新的试算滑面:

$$V_i = \text{Cross}(se_i, t) \quad (i=1) \quad (2)$$

$$\text{或 } V_i = \text{Cross}(se_i, se_{i-1}) \quad (i=2, \dots, m) \quad (3)$$

Cross 为两直线段的求交函数,新试算滑面需通过几何合理性条件检验(第 4 条),然后再计算其安全系数,计算简图请参考文献[7]。

(2) 旋转方向的控制

如果存在:

$$F_i(j+1) < F_i(j) \quad (4)$$

式中 $F_i(j)$ 为滑面段 i 经第 j 次旋转所得试算滑面的安全系数。

则认为探测成功,基准角增加:

$$\Omega_i^{j+1} = \Omega_i^j \varepsilon_1 \quad (N_d \text{ 不变号}) \quad (5)$$

否则认为探测失败, 基准角减小:

$$\Omega_i^{j+1} = \Omega_i^j \varepsilon_2 \quad (N_d \text{ 变号}) \quad (6)$$

式中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 均为角度增量系数, 为避免出现震荡效应, 分别取 $\varepsilon_1 = 1.666, \varepsilon_2 = 0.333$ 。当探测成功时 N_d 不变号, 表示滑面段旋转方向不变; 如果 N_d 变号, 则表示滑面段旋转方向反向。基准角变化是为了在保证精度的前提下加速搜索。

当满足条件:

$$\Omega_i^{j+1} = \Omega_i^1 \Psi \quad (7)$$

Ψ 为容差, 一般取 0.01, 滑面段 i 结束绕节点 V_{i+1} 的旋转, 而开始绕节点 V_i 旋转, 步骤如前, 节点 V_{i+1} 的坐标则由滑面段 i 与滑面段 $i+1$ 求交得到:

$$V_{i+1} = \text{Cross}(se_i, se_{i+1}) \quad (i=1, \dots, m-1) \quad (8)$$

$$\text{或 } V_{i+1} = \text{Cross}(se_i, t) \quad (i=m) \quad (9)$$

当滑面段 i 绕节点 V_{i+1} 及 V_i (右、左端点) 旋转探测完毕, 则由滑面段 $i+1$ 重复以上旋转探测过程, 直到所有滑面段依次旋转探测完毕。

2.4 重启

计算当前临界滑面, 并以当前临界滑面为初始滑面重新开始新一轮的旋转探测。

2.5 收敛条件

旋转探测与重启过程将一直进行下去, 直到满足下列条件则认为计算收敛:

$$\Omega_i^{j+1} \leq \Omega_i^1 \Psi \quad (i=1, \dots, m) \quad (10)$$

$$|F_i(S_{j+1}) - F_i(S_j)| < \Delta \quad (11)$$

式中 Δ 为安全系数收敛容差, 取 0.001。

3 技术改进

3.1 避免节点重合

节点重合会带来数值困难, 避免节点重合最好的方法是给出各滑面段旋转角的上、下限, 本文按照如下方式确定旋转角的限值, 如图 3 所示。

原方法要求滑面几何形状上凹, 如图 3 滑面 $ABCDE$ 所示, 即各滑面段倾角应递增。假定滑面段 BC 正绕 C 点旋转, 则:

$$A_{\max_{BC}} = A_{DC}, \quad A_{\min_{BC}} = A_{AC} \quad (12)$$

式中 $A_{\max_{BC}}, A_{\min_{BC}}$ 分别为滑面段 BC 旋转角的上、下限; A_{DC}, A_{AC} 分别为线段 DC, AC 的倾角。

如果 BC 绕 B 点旋转, 则

$$A_{\max_{BC}} = A_{BD}, \quad A_{\min_{BC}} = A_{AB} \quad (13)$$

为避免相邻节点在旋转时重合, 如节点 A, B (当 BC 段绕 C 点旋转时), 实际旋转角的上、下限应稍微与理论值错开一点。

对于滑面左、右两端滑面段 (第一段与最后一段), 如: AB 绕 B 点旋转时, 其旋转角的下限无法确定; DE 绕 D 点旋转时, 其旋转角上限无法确定, 此时可按照经典土压力关于主动区 (坡顶) 与被动区 (坡角) 倾角限值来定义^[11]:

$$\alpha_{\text{Active}} = \frac{\phi'}{2} + 45^\circ, \quad \alpha_{\text{Passive}} = \frac{\phi'}{2} - 45^\circ \quad (14)$$

式中 $\alpha_{\text{Active}}, \alpha_{\text{Passive}}$ 分别为主动区、被动区倾角限值; ϕ' 为介质的有效内摩擦角。

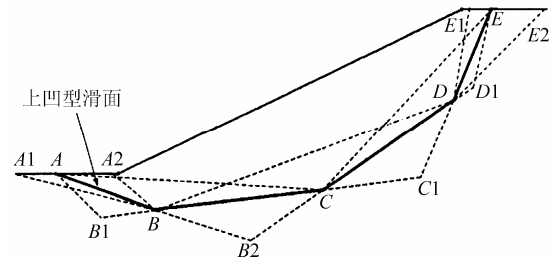


图3 滑面旋转角上、下限示意图

Fig.3 The upper and low bounds of rotation angle

3.2 创建上凸型试算滑面

不论滑面的形状是上凹还是上凸, 以旋转滑面段来产生试算滑面的原理应该均适用。原算法要求滑面形状向上凹, 是不得已而为之, 因为各滑面段旋转角的上下限与其相邻滑面段的倾角有关。如果允许滑面上凸, 则会导致错误, 不能形成有效的试算滑面, 如图 4 所示。

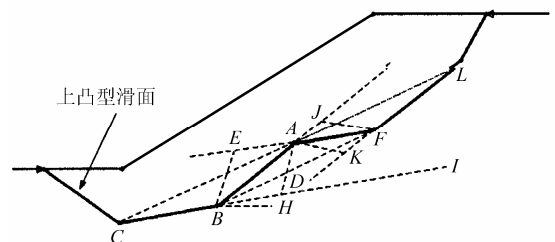


图4 上凸型滑面

Fig.4 The convex upward slip surface

假定滑面段 AB 绕点 A 旋转, 如果按 3.1 节所示方法 (上凹型滑面) 来计算滑面段 AB 旋转角的上、下限, 则:

$$A_{\max_{AB}} = A_{AF}, \quad A_{\min_{AB}} = A_{AC} \quad (15)$$

式中 A_{AF} , A_{AC} 分别为线段 AF , AC 的倾角。此时旋转角上限小于下限, 不能形成有效试算滑面。如果滑面段 AB 绕 B 点旋转, 还是按上凹型滑面来计算旋转角上、下限, 则

$$A_{\max_{AB}} = A_{BF}, \quad A_{\min_{AB}} = A_{BC} \quad (16)$$

式中 A_{BF} , A_{BC} 分别为线段 BF , BC 的倾角。表面上 $A_{\max_{AB}}$ 大于 $A_{\min_{AB}}$, 似乎没什么矛盾, 但随后会发现, 此时 AB 与 AF 的交点不在区间 (x_B, x_F) 之中, 这显然不满足节点水平坐标递增的条件。

多数情况下, 滑面上凹并不是问题, 因为临界滑面一般均呈上凹型。然而对于地质条件较为复杂的边坡 (如软弱层呈上凸型等), 上凹约束则可能会导致错误的结果。解决上凸型滑面的关键仍在于确定滑面段旋转角的上、下限, 此时还要求相邻滑面段交点必须满足节点水平坐标递增条件, 如当滑面段 AB 绕 B 点旋转时, 可设定 $A_{\max_{AB}} = A_{AB}$, $A_{\min_{AB}} = A_{BF}$, 此时便能形成有效试算滑面。当然, 旋转滑面段与其首尾相邻滑面段的倾角关系不同, 大小限值取值也不同, 需考虑到各种情况, 此部分内容相对简单, 限于篇幅, 恕不赘述。

3.3 节点数调整机制

当采用多线段折线来模拟边坡滑面时, 滑面的节点数往往取 5 个左右, 这样似乎效果最好, 即不会因为节点过少而使滑面太粗糙, 也不会因为节点数过多, 而导致实际搜索范围减小, 陷入局部极值。然而, 无可争议的是, 滑面节点越多, 其模拟出的滑面越光滑, 越与实际接近。如何在节点较多的情况下既保证有足够的搜索范围, 又不影响计算精度呢, 解决方案是在计算过程中调整节点数, 即先在节点较少情况下搜索临界滑面, 等搜索到临界滑面后, 再以此临界滑面为初始滑面, 利用中点插值技术增加节点, 这样即使搜索范围减小, 但因在临界滑面附近, 一般可找到更光滑的临界滑面。

4 算例分析

本文依次给出了 3 种工况下的边坡算例 (复合、软弱层、软弱层与孔隙水, 因为原方法已能很好地解决简单均质边坡临界滑面的搜索问题, 而本文的重点在于说明改进算法的优越性, 所以没有再提供简单均质边坡的算例), 安全系数的计算均采用通用条分法 GLE^[12, 13], 条间力采用 Half-Sine 函数, 土条划分数 25, 土质及几何参数见相应算例。

“搜索路径”为一次搜索任务所需试算滑面的集合, 文中将安全系数-试算滑面数曲线也称为搜索

路径。搜索路径按如下规则编号: 取初始滑面编号与求解次数的组合, 如初始滑面 A 的第 3 次搜索, 则搜索路径的编号为 $A3$ 。

文中新增加的几何合理性条件以及防止相邻节点重合的机制已成为改进算法的一部分, 它们能够确保算法不出现意外数值错误, 且对所有算例均起作用。而其他改进 (节点数加倍机制、上凸型滑面) 能否起作用, 则视待分析问题的需要而定, 这些改进效果的演示只能分散在各个算例中。此外, 为较为全面地检测 MC 搜索技术的性能, 笔者一般将初始滑面置于远离临界滑面的位置 (对于经典算例, 临界滑面位置已知), 除非坡体介质较复杂, 为搜索到全局临界滑面, 不得不靠近已知临界滑面。所有算例的求解均采用笔者自主研发的边坡稳定分析软件 ZSlope^[10], 它基于人机交互图形建模技术, 能够实时动态显示搜索过程。

4.1 复合边坡

(1) 初始滑面 A

此算例出自文献[14]。对于初始滑面 A , 笔者共搜索了 5 次, 搜索路径见图 5。因为 MC 搜索技术基于随机概念, 所以每次搜索路径并不相同, 但离散性一般较小。图 6 给出了 5 次搜索路径曲线, 图 7 给出了第 5 次搜索的试算滑面。表 1 还给出了其他文献的计算结果, 图中 SF 为安全系数。

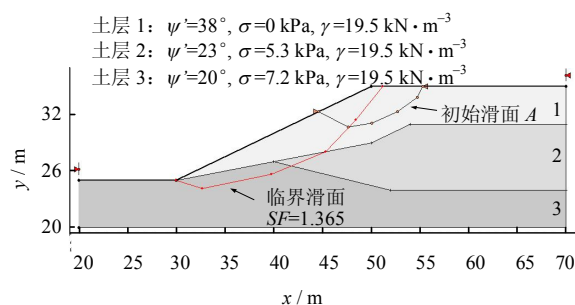


图 5 临界滑面 (复合边坡, ZSlope 绘制)

Fig.5 The critical slip surface of composite slope

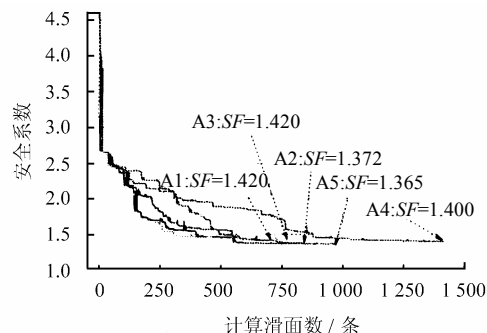


图 6 初始滑面 A 的 5 次搜索路径

Fig.6 The search paths for initial slip surface A

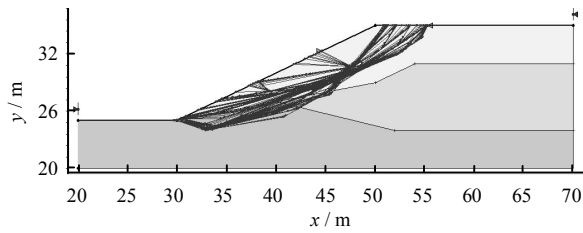


图7 初始滑面A的第5次搜索路径(ZSlope绘制)

Fig.7 The fifth search path for initial slip surface A

表1 其他文献结果对比(复合边坡)

Table 1 The results from other literatures

搜索方法	计算结果	出处
随机优化法	1.378	文献[5]
遗传算法	1.390	文献[15]
本文	1.365	/

(2) 上凸型初始滑面B

本算例只是为了说明改进后的MC搜索技术可以适用于上凸型初始滑面,至于最终临界滑面呈何种形状需要具体问题具体分析。图8中初始滑面B呈上凸型,临界滑面为上凹型(多次搜索),安全系数为1.353,比前一算例(初始滑面A)还小。虽然在工程上这点差别并无意义,但说明不论是初始滑面A还是B,改进算法均能很好地适用。

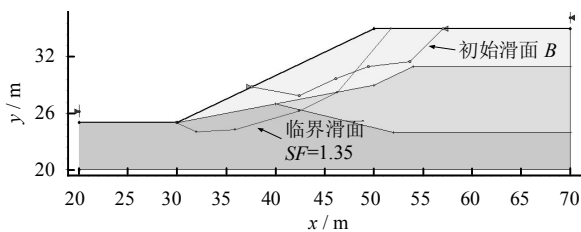


图8 临界滑面(初始滑面为上凸型,ZSlope绘制)

Fig.8 The critical slip surface for initial convex upward slip surface

(3) 节点加倍的效果

图9中初始滑面节点数为6,节点数加倍后为11,最终临界滑面比加倍前(图8)要光滑一些,安全系数也更小。

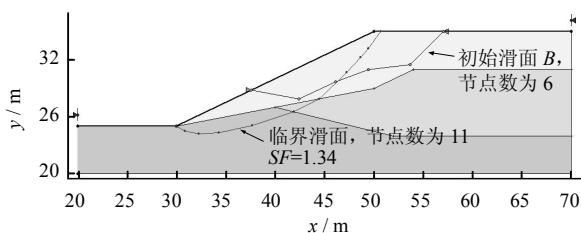


图9 临界滑面(节点数加倍机制,ZSlope绘制)

Fig.9 The critical slip surface, the number of nodes increasing

4.2 软弱层边坡

(1) 初始滑面不收敛

此算例出自文献[16],见图10,本算例的特别之处在于初始滑面D与F均不收敛(求解安全系数时),初始滑面不收敛并不一定导致搜索失败(这也是该算法的优点之一),如初始滑面D无论搜索多少次均失败,而初始滑面F搜索成功(共搜索了11次,其中5次成功,搜索路径见图11,图12还给出了第5次成功搜索的试算滑面)。如果在一个旋转探测周期内,没有一个试算滑面收敛,则搜索失败。尽管初始滑面是否收敛并不直接影响搜索成败,但不可否认,初始滑面不收敛,搜索失败的机率将会增加。

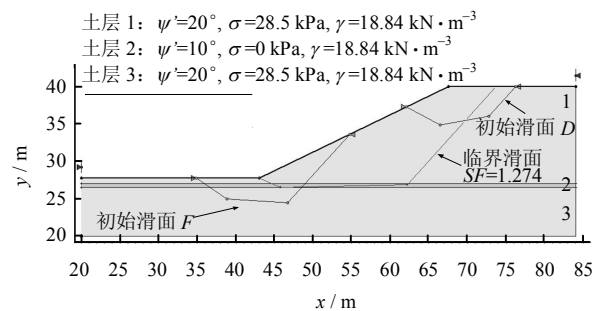


图10 临界滑面(软弱层边坡,ZSlope绘制)

Fig.10 The critical slip surface of soft layer slope

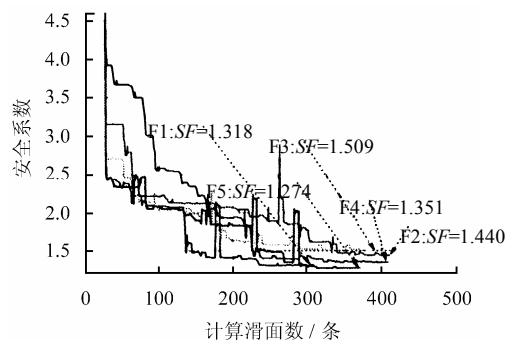


图11 初始滑面F的5次搜索路径

Fig.11 The fifth search path of initial slip surface F

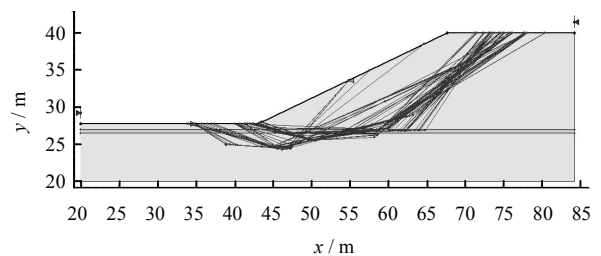


图12 初始滑面F的第5次搜索路径(ZSlope绘制)

Fig.12 The fifth search path of initial slip surface F

如果试算滑面数值不收敛, 则将其安全系数赋一特大值(如 1 000), 这样便不会被选为临界滑面, 在绘制搜索路径曲线时, 这些不收敛的点也要剔除。请注意, 笔者完全可以选择其他更容易搜索成功的初始滑面, 但这样便无法考查 MC 搜索技术在较为苛刻的条件下的表现。表 2 还给出了其他文献的相应结果。

表 2 其他文献结果对比(含软弱层)
Table 2 The results from other literatures

搜索方法	计算结果	出处
遗传算法	1.286	文献[15]
本文	1.274	/

(2) 临界滑面为上凸型

将图 10 所示模型的软弱夹层移到一个新位置(厚度 0.5 m), 便得到本算例, 如图 13 所示, 其他模型参数与图 10 一样。初始滑面 E 沿软弱夹层(呈上凸型)设置, 临界滑面如图 13 所示, 它也呈上凸型, 改进前的 MC 法得不到这种结果。图 14 还给出了对应试算滑面。

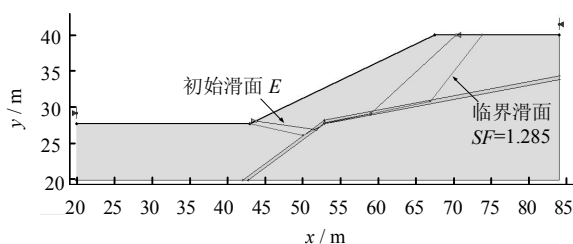


图 13 上凸型临界滑面 (ZSlope 绘制)
Fig.13 The convex upward critical slip surface

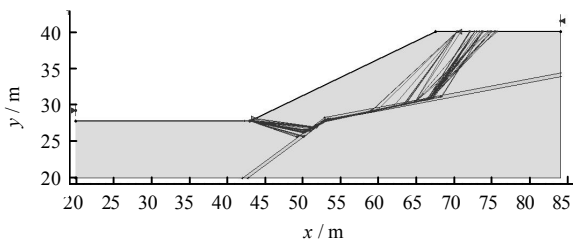


图 14 初始滑面 E 的第 2 次搜索路径 (ZSlope 绘制)
Fig.14 The second search path of initial slip surface E

4.3 软弱层、孔隙水边坡

当坡体具有多个极值时, 找到全局临界滑面不是一个简单的任务。对于 MC 搜索技术来说, 则需要多个初始滑面(分布在不同位置)。虽然可以开发一些算法^[4, 6, 7]自动生成随机分布的初始滑面, 但这样效果并不是很好, 笔者更愿意手工选取少量初

始滑面(3~5 条), 其好处在于可以利用已有的一些经验, 提高计算效率。

(1) 初始滑面 G

此算例出自文献[3], 见图 15, 由于坡体介质及边界较为复杂, 所以(多次)搜索结果的离散性稍大一些, 见图 16, 图中给出了初始滑面 G 的 8 次搜索路径, 图 17 给出了初始滑面 G 的第 8 次搜索路径。

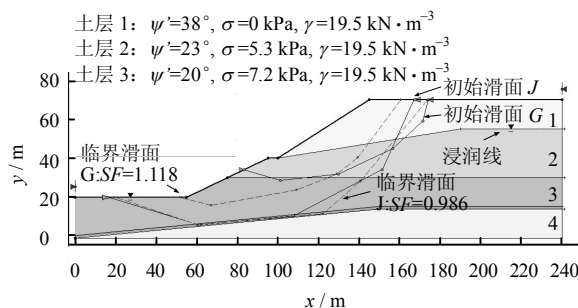


图 15 临界滑面(软弱层及孔隙水, ZSlope 绘制)
Fig.15 The critical slip surface with soft layer and pore water

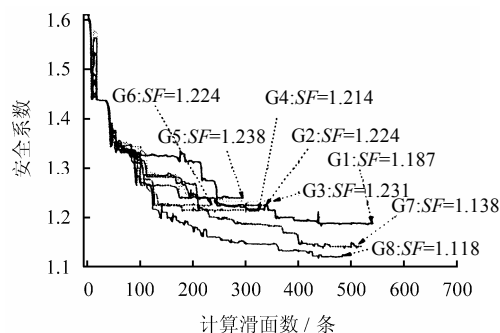


图 16 初始滑面 G 的 8 次搜索路径
Fig.16 The eighth search path of initial slip surface G

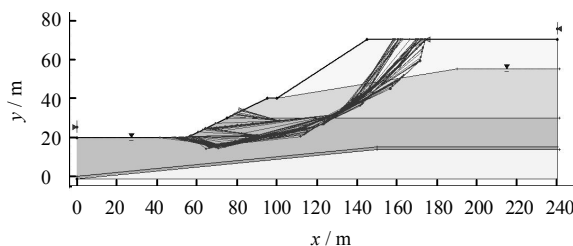


图 17 初始滑面 G 的第 8 次搜索路径 (ZSlope 绘制)
Fig.17 The eighth search path of initial slip surface G

(2) 初始滑面 J

图 15 还给出了初始滑面 J 及其对应的另一个临界滑面, 图 18 给出了初始滑面 J 对应的 6 次搜索路径, 图 18 中的曲线波动很剧烈, 说明搜索区域极不均匀, 图 19 给出了初始滑面 J 的第 6 次搜索路径, 表 3 还给出了其他文献相应的结果。

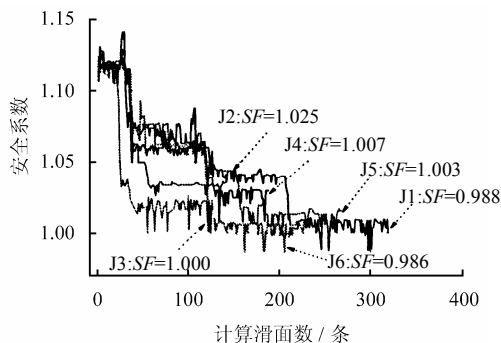
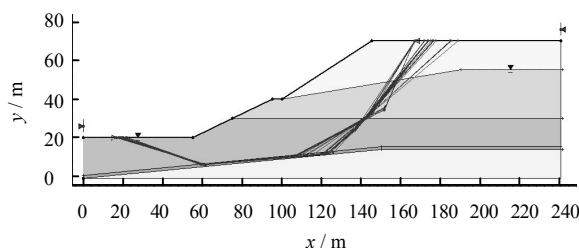
图 18 初始滑面 J 的 6 次搜索路径Fig.18 The sixth search path of initial slip surface J 图 19 初始滑面 J 的第 6 次搜索路径 (ZSlope 绘制)Fig.19 The sixth search path of initial slip surface J

表 3 其他文献结果对比 (含软弱层及孔隙水)

Table 3 The results from other literatures

搜索方法	计算结果	出处
随机优化法	1.011~1.025	文献[5]
Monte Carlo (I)	0.973~0.974	文献[6]
Monte Carlo (II)	0.933	文献[7]
本文	0.986	/

5 结 论

MC 搜索技术具有搜索范围大、适用于各种复杂条件、对初始滑面的位置不敏感等优点,针对原方法中存在的问题,笔者对其进行了改进。

算例分析表明:改进后的算法保持了原方法的优点,且数值计算更稳定、应用范围更广、搜索效率更高。不论边坡的地质构造简单还是复杂(文中对后者进行了重点分析),MC 搜索技术均能够顺利地搜索出全局临界滑面(或充分地接近)。笔者还将此算法纳入到自主研发的 ZSlope 边坡稳定分析软件中。

因为 MC 搜索技术基于随机概念,所以其搜索结果具有一定的随机性(在可以接受的小范围内),即使在初始滑面相同的情况下,也是如此。为确保结果的可靠性,需要对同一初始滑面进行多次搜索,且多设几条不同位置的初始滑面,这一特性在某种程度上增加了该算法的复杂性。

参 考 文 献

- [1] Baker R. Determination of the critical slip surface in slope stability computations[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1980, 4: 333—359.
- [2] Aral K, Tagyo K. Determination of noncircular slip surface giving the minimum factor of safety in slope stability analysis[J]. **Soils and Foundations**, 1985, 25(1): 43—51.
- [3] Chen Z Y, Shao C M. Evaluation of minimum factor of safety in slope stability analysis[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1988, 25: 735—748.
- [4] Boutrup E, Lovell C W. Search technique in slope stability analysis[J]. **Engineering Geology**, 1980, 16: 51—61.
- [5] Chen Z Y. Random trials used in determining global minimum factors of safety of slopes[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1992, 29: 225—233.
- [6] Venanzolo R Greco. Efficient Monte Carlo technique for locating Critical Slip Surface[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1996, 122(7): 517—525.
- [7] Abdallah I, Husein Malkawi, Waleed F. et al. Global Search Method for locating general slip surface using Monte Carlo techniques[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2001, 127(8): 688—698.
- [8] Gautam Bhattacharya. Discussion of 'Global Search Method for locating general slip surface using Monte Carlo Techniques'[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2002, 128(8): 1 048—1 049.
- [9] Abdallah I, Husein Malkawi, Waleed F, et al. Closure to 'Global Search Method for locating general slip surface using Monte Carlo Techniques'[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2002, 128(10): 1 050.
- [10] 张鲁渝. 边坡稳定分析软件 ZSlope 的开发[J]. **岩石力学与工程学报**, 2004, 23(16): 2 830—2 835.
ZHANG Lu-yu. The development of software for slope stability analysis[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(16): 2 830—2 835.
- [11] 陈仲颐, 周景星. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1992.
- [12] Lee W Abramson, Thomas S Lee, Sunil Sharma, et al. Slope Stability and Stabilization Methods [M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 1996.
- [13] 张鲁渝. 一个用于边坡稳定分析的通用条分法[J]. **岩石力学与工程学报**, 2005, 24(3): 496—501.
ZHANG Lu-yu. Generalized limit equilibrium method for slope stability analysis[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(3): 496—501.
- [14] Donald I B, Giam P S K. Soil Slope Stability Programs Review[M]. Melbourne: ACADS Publication No. U255, 1989.
- [15] Anthony T C Goh. Genetic algorithm search for critical slip surface in multiple-wedge stability analysis[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1999, 36: 382—391.
- [16] Fredlund D G, Krahn J. Comparison of slope stability methods of analysis[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1977, 14(3): 429—439.